

TD 2

Exercice 1. (Exemple de perturbation)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 10,1 \\ 6,9 \end{pmatrix}.$$

Résolvez les équations $Ax = y_1$ et $Ax = y_2$.

Exercice 2. (Propriétés générales du conditionnement I)

On munit \mathbb{R}^N d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée, notée aussi $\|\cdot\|$. Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\text{cond}(A) \geq 1$.
2. Montrer que $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Montrer que $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$.

Exercice 3. (Propriétés générales du conditionnement II)

On suppose que \mathbb{R}^N est muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de la norme induite, notée aussi $\|\cdot\|_2$. On note alors $\text{cond}_2(A)$ le conditionnement d'une matrice A inversible.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note σ_N (resp. σ_1) la plus grande (resp. petite) valeur propre de $A^t A$ (noter que $A^t A$ est une matrice symétrique définie positive). Montrer que $\text{cond}_2(A) = \sqrt{\sigma_N/\sigma_1}$.
2. On suppose maintenant que A est symétrique définie positive, montrer que $\text{cond}_2(A) = \lambda_N/\lambda_1$ où λ_N (resp. λ_1) est la plus grande (resp. petite) valeur propre de A .
3. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\text{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale (c'est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Montrer que $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R)$.
5. Soit $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que $\text{cond}_2(A+B) \leq \max\{\text{cond}_2(A), \text{cond}_2(B)\}$.

Exercice 4. (Minoration du conditionnement)

Soit $\|\cdot\|$ une norme induite sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) \neq 0$.

1. Montrer que si $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, alors B est inversible.
2. Montrer que $\text{cond}(A) \geq \sup \left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|}, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \det B = 0 \right\}$.

Exercice 5. (Minoration du conditionnement)

On note $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible, $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ le conditionnement de A , et soit $\delta A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $A + \delta A$ est singulière, alors

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|\delta A\|}. \quad (1)$$

2. On suppose dans cette question que la norme $\|\cdot\|$ est la norme induite par la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N . Montrer que la minoration (1) est optimale, c'est-à-dire qu'il existe $\delta A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $A + \delta A$ soit singulière et telle que l'égalité soit vérifiée dans (1).

Indication : On pourra chercher δA de la forme

$$\delta A = -\frac{yx^t}{x^t x}.$$

avec $y \in \mathbb{R}^N$ convenablement choisi et $x = A^{-1}y$.

3. On suppose ici que la norme $\|\cdot\|$ est la norme induite par la norme infinie sur \mathbb{R}^N . Soit $\alpha \in]0, 1[$. Utiliser l'inégalité (1) pour trouver un minorant, qui tend vers $+\infty$ lorsque α tend vers 0, de $\text{cond}(A)$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (Inversion de matrices et conditionnement)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U, V \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$,

$$\|UV\| \leq \|U\|\|V\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose qu'on a trouvé l'inverse de A à une erreur près au sens où on a trouvé une matrice Δ vérifiant :

$$A(A^{-1} + \Delta) = I + C,$$

où $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer l'inégalité :

$$\frac{\|\Delta\|}{\|A^{-1}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|C\|}{\|I\|}.$$